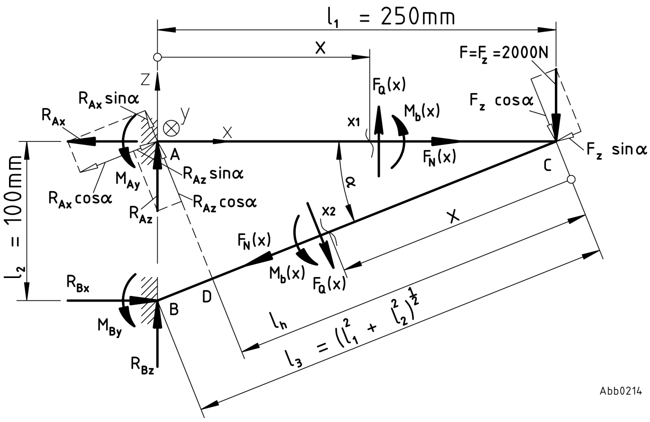

Abb. 0.1: Darstellung des Knickbalkens mit den für die Berechnung nach der Methode von Castigliano nötigen Hilfsmaßen.

Die Unbekannten in diesem Fall sind in der Einspannung A:

$$R_{A_x}, R_{A_z}, M_{A_y}$$

und in der Einspannung B:

$$R_{B_x}, R_{B_z}, M_{B_y}$$

Gleichzeitig können wir folgende Gleichgewichtsgleichungen aufstellen:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0: & R_{A_x} - R_{B_x} = \quad 0 \quad (0.1) \\ \sum F_z = 0: & R_{A_z} + R_{B_z} - F = \quad 0 \quad (0.2) \\ \sum M_y \Big|_A = 0: & M_{A_y} + M_{B_y} + R_{B_x} l_2 - F l_1 = \quad 0 \quad (0.3) \end{cases}$$

Unser System ist also 3x unbestimmt. D.h. wir benötigen noch 3 Gleichungen, um unsere Unbekannten berechnen zu können. Dafür bemühen wir eine spezielle Form des 2. Satzes von Castgliano - den Satz von Menabrea, welcher besagt, daß die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach einer statisch unbestimmten Lagerreaktion gleich Null ist:

$$\frac{\partial U_{el}}{\partial F_i} = f_i = 0; \qquad wo \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{0.4}$$

Dafür betrachten wir den Punkt A. Hier wirken die Lagerreaktionen:

$$A: \qquad R_{A_x}; R_{A_z}; M_{A_y} = \qquad unbekannt \quad (0.5)$$

Für unser Vorhaben treffen wir folgende Annahmen:

$$l_1 = 250mm; l_2 = 100mm; l_3 = (l_1^2 + l_2^2)^{\frac{1}{2}}; sin\alpha = \frac{l_2}{l_3}; cos\alpha = \frac{l_1}{l_3};$$
$$h = \overline{AD} = l_1 sin\alpha = l1\frac{l_2}{l_3}; l_h = \overline{CD} = l_1 cos\alpha = l1\frac{l_1}{l_3}; E = 210.000N/mm^2;$$
$$A = 900mm^2; I = 270.000mm^4; G = 150.000mm^4; \nu = 0,3; \kappa = 0,45; \tag{0.6}$$

Des weiteren nehmen wir in Uhrzeigersinn zwei Freistellungen vor: X_1 für den Abschnitt A → C und X_2 für den Abschnitt C → B, wo wir die Werte der Schnittlasten aufschreiben:

A → C, für $0 < x = x_1 < l_1$:

$$M_{b_1}(x) = R_{A_z}x - M_{A_y} \tag{0.7}$$

$$F_{N_1}(x) = R_{A_x} \tag{0.8}$$

$$F_{Q_1}(x) = -R_{A_z} \tag{0.9}$$

C → B, für $0 < x = x_2 < l_3$:

$$M_{b_2}(x) = -R_{A_x}[hcos\alpha - (l_h - x)sin\alpha] + R_{A_z}[hsin\alpha + (l_h - x)cos\alpha] - M_{A_y} + Fxcos\alpha \tag{0.10}$$

$$F_{N_2}(x) = -R_{A_x}cos\alpha + R_{A_z}sin\alpha - Fsin\alpha \tag{0.11}$$

$$F_{Q_2}(x) = R_{A_x}sin\alpha + R_{A_z}cos\alpha - Fcos\alpha \tag{0.12}$$

Da aber im Punkt A eine feste Einspannung vorliegt, können wir davon ausgehen, daß in A alle Verschiebungen und Verdrehungen Null sind:

$$u_{A_x} = 0; \quad u_{A_z} = 0; \quad \varphi_{A_y} = 0. \tag{0.13}$$

können wir aus [2.13] folgendes schreiben:

$$\begin{aligned} u_{A_x} = &\int_0^{l_1} \frac{M_{b_1}}{EI_y}\frac{\partial M_{b_1}}{\partial R_{A_x}}dx + \int_0^{l_1} \frac{F_{N_1}}{EA}\frac{\partial F_{N_1}}{\partial R_{A_x}}dx + \int_0^{l_1} \frac{F_{Q_1}}{\kappa GA}\frac{\partial F_{Q_1}}{\partial R_{A_x}}dx + \\ &+ \int_0^{l_3} \frac{M_{b_2}}{EI_y}\frac{\partial M_{b_2}}{\partial R_{A_x}}dx + \int_0^{l_3} \frac{F_{N_2}}{EA}\frac{\partial F_{N_2}}{\partial R_{A_x}}dx + \int_0^{l_3} \frac{F_{Q_2}}{\kappa GA}\frac{\partial F_{Q_2}}{\partial R_{A_x}}dx = 0; \end{aligned} \tag{0.14}$$

$$\begin{aligned} u_{A_z} = &\int_0^{l_1} \frac{M_{b_1}}{EI_y}\frac{\partial M_{b_1}}{\partial R_{A_z}}dx + \int_0^{l_1} \frac{F_{N_1}}{EA}\frac{\partial F_{N_1}}{\partial R_{A_z}}dx + \int_0^{l_1} \frac{F_{Q_1}}{\kappa GA}\frac{\partial F_{Q_1}}{\partial R_{A_z}}dx + \\ &+ \int_0^{l_3} \frac{M_{b_2}}{EI_y}\frac{\partial M_{b_2}}{\partial R_{A_z}}dx + \int_0^{l_3} \frac{F_{N_2}}{EA}\frac{\partial F_{N_2}}{\partial R_{A_z}}dx + \int_0^{l_3} \frac{F_{Q_2}}{\kappa GA}\frac{\partial F_{Q_2}}{\partial R_{A_z}}dx = 0; \end{aligned} \tag{0.15}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{A_y} = &\int_0^{l_1} \frac{M_{b_1}}{EI_y}\frac{\partial M_{b_1}}{\partial M_{A_y}}dx + \int_0^{l_1} \frac{F_{N_1}}{EA}\frac{\partial F_{N_1}}{\partial M_{A_y}}dx + \int_0^{l_1} \frac{F_{Q_1}}{\kappa GA}\frac{\partial F_{Q_1}}{\partial M_{A_y}}dx + \\ &+ \int_0^{l_3} \frac{M_{b_2}}{EI_y}\frac{\partial M_{b_2}}{\partial M_{A_y}}dx + \int_0^{l_3} \frac{F_{N_2}}{EA}\frac{\partial F_{N_2}}{\partial M_{A_y}}dx + \int_0^{l_3} \frac{F_{Q_2}}{\kappa GA}\frac{\partial F_{Q_2}}{\partial M_{A_y}}dx = 0; \end{aligned} \tag{0.16}$$

Um die Gleichungen (0.14), (0.15) und (0.16) leichter aufzustellen, bedienen wir uns einer Computer-Algebra-Software (CAS), in unserem Fall verwenden wir *wxMaxima*. Dafür schreiben wir die Gleichungen (0.7), (0.8), (0.9), (0.10), (0.11) und (0.12) so, daß, unter Voraussetzung der Annahmen (0.6), die Koefizienten der Unbekannten in einer Tabelle (Tab. 0.1)[S. 3] aufgelistet werden können.

	R_{A_x}	R_{A_z}	M_{A_y}	F_z
$M_{b_1}(x)$	0	x	-1	0
$M_{b_2}(x)$	$-\frac{a}{c}h + \frac{b}{c}(l-x)$	$\frac{a}{c}(l-x) + \frac{b}{c}h$	-1	$F\frac{a}{c}x$
$F_{N_1}(x)$	-1	0	0	0
$F_{N_2}(x)$	$-\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	0	$F\frac{b}{c}$
$F_{Q_1}(x)$	0	-1	0	0
$F_{Q_1}(x)$	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{c}$	0	$-F\frac{a}{c}$

Tab. 0.1: Darstellung der Koeffizienten aus den Gleichungen [0.7 bis 0.12], in denen R_{A_x}, R_{A_z} und M_{A_y} die Unbekannten sind.

Code aus wxMaxima:

```
(%i129) kill(all)$ fpprintprec:7$
a:250$ b:100$ F:2000$ E:210000$ A:900$ I:270000$ G:150000$ nu:0.3$ k:0.45$
e:I/A$ g:(E*I)/(k*G*A)$ c:((a^2)+(b^2))^(1/2)$  h:a*b/c$  l:h*a/b$
/* ----------------------------------*/
/* Momente */
m11:0$                     m12:x$                        m13:-1$   m14:0$
m21:-(a/c)*h+(b/c)*(l-x)$  m22:(a/c)*(l-x)+(b/c)*h$      m23:-1$   m24:F*(a/c)*x$
/* Normalkraft */
n11:1$                     n12:0$                        n13:0$    n14:0$
n21:-(a/c)$                n22:(b/c)$                    n23:0$    n24:-F*(b/c)$
/* Querkraft */
q11:0$                     q12:-1$                       q13:0$    q14:0$
q21:(b/c)$                 q22:(a/c)$                    q23:0$    q24:-F*(a/c)$
/* ----------------------------------*/
/* mit 1/EI gekuerzt */

/* Aus Moment      m   */

Gm11:integrate((m11*m11), x, 0, a)$ Gm12:integrate((m21*m21), x, 0, c)$
Gm21:integrate((m12*m11), x, 0, a)$ Gm22:integrate((m22*m21), x, 0, c)$
Gm31:integrate((m13*m11), x, 0, a)$ Gm32:integrate((m23*m21), x, 0, c)$

Hm11:integrate((m11*m12), x, 0, a)$ Hm12:integrate((m21*m22), x, 0, c)$
Hm21:integrate((m12*m12), x, 0, a)$ Hm22:integrate((m22*m22), x, 0, c)$
Hm31:integrate((m13*m12), x, 0, a)$ Hm32:integrate((m23*m22), x, 0, c)$

Jm11:integrate((m11*m13), x, 0, a)$ Jm12:integrate((m21*m23), x, 0, c)$
Jm21:integrate((m12*m13), x, 0, a)$ Jm22:integrate((m22*m23), x, 0, c)$
Jm31:integrate((m13*m13), x, 0, a)$ Jm32:integrate((m23*m23), x, 0, c)$

Mm11:integrate((m14*m11), x, 0, a)$ Mm12:integrate((m24*m21), x, 0, c)$
Mm21:integrate((m14*m12), x, 0, a)$ Mm22:integrate((m24*m22), x, 0, c)$
Mm31:integrate((m14*m13), x, 0, a)$ Mm32:integrate((m24*m23), x, 0, c)$

/* Aus Normalkraft      n  */

Gn11:e*integrate((n11*n11), x, 0, a)$ Gn12:e*integrate((n21*n21), x, 0, c)$
Gn21:e*integrate((n12*n11), x, 0, a)$ Gn22:e*integrate((n22*n21), x, 0, c)$
Gn31:e*integrate((n13*n11), x, 0, a)$ Gn32:e*integrate((n23*n21), x, 0, c)$

Hn11:e*integrate((n11*n12), x, 0, a)$ Hn12:e*integrate((n21*n22), x, 0, c)$
Hn21:e*integrate((n12*n12), x, 0, a)$ Hn22:e*integrate((n22*n22), x, 0, c)$
```

```
Hn31:e*integrate((n13*n12), x, 0, a)$ Hn32:e*integrate((n23*n22), x, 0, c)$

Jn11:e*integrate((n11*n13), x, 0, a)$ Jn12:e*integrate((n21*n23), x, 0, c)$
Jn21:e*integrate((n12*n13), x, 0, a)$ Jn22:e*integrate((n22*n23), x, 0, c)$
Jn31:e*integrate((n13*n13), x, 0, a)$ Jn32:e*integrate((n23*n23), x, 0, c)$

Mn11:e*integrate((n14*n11), x, 0, a)$ Mn12:e*integrate((n24*n21), x, 0, c)$
Mn21:e*integrate((n14*n12), x, 0, a)$ Mn22:e*integrate((n24*n22), x, 0, c)$
Mn31:e*integrate((n14*n13), x, 0, a)$ Mn32:e*integrate((n24*n23), x, 0, c)$

/* Aus Querkraft      q  */

Gq11:g*integrate ((q11*q11), x, 0, a)$ Gq12:g*integrate ((q21*q21), x, 0, c)$
Gq21:g*integrate ((q12*q11), x, 0, a)$ Gq22:g*integrate ((q22*q21), x, 0, c)$
Gq31:g*integrate ((q13*q11), x, 0, a)$ Gq32:g*integrate ((q23*q21), x, 0, c)$

Hq11:g*integrate((q11*q12), x, 0, a)$ Hq12:g*integrate((q21*q22), x, 0, c)$
Hq21:g*integrate((q12*q12), x, 0, a)$ Hq22:g*integrate((q22*q22), x, 0, c)$
Hq31:g*integrate((q13*q12), x, 0, a)$ Hq32:g*integrate((q23*q22), x, 0, c)$

Jq11:g*integrate((q11*q13), x, 0, a)$ Jq12:g*integrate((q21*q23), x, 0, c)$
Jq21:g*integrate((q12*q13), x, 0, a)$ Jq22:g*integrate((q22*q23), x, 0, c)$
Jq31:g*integrate((q13*q13), x, 0, a)$ Jq32:g*integrate((q23*q23), x, 0, c)$

Mq11:g*integrate((q14*q11), x, 0, a)$ Mq12:g*integrate((q24*q21), x, 0, c)$
Mq21:g*integrate((q14*q12), x, 0, a)$ Mq22:g*integrate((q24*q22), x, 0, c)$
Mq31:g*integrate((q14*q13), x, 0, a)$ Mq32:g*integrate((q24*q23), x, 0, c)$

/* Koeffizienten des Gleichungssystems */

A11:Gm11+Gm12+Gn11+Gn12+Gq11+Gq12$
A12:Gm21+Gm22+Gn21+Gn22+Gq21+Gq22$
A13:Gm31+Gm32+Gn31+Gn32+Gq31+Gq32$

A21:Hm11+Hm12+Hn11+Hn12+Hq11+Hq12$
A22:Hm21+Hm22+Hn21+Hn22+Hq21+Hq22$
A23:Hm31+Hm32+Hn31+Hn32+Hq31+Hq32$

A31:Jm11+Jm12+Jn11+Jn12+Jq11+Jq12$
A32:Jm21+Jm22+Jn21+Jn22+Jq21+Jq22$
A33:Jm31+Jm32+Jn31+Jn32+Jq31+Jq32$

B11:Mm11+Mm12+Mn11+Mn12+Mq11+Mq12$
B21:Mm21+Mm22+Mn21+Mn22+Mq21+Mq22$
B31:Mm31+Mm32+Mn31+Mn32+Mq31+Mq32$

/* Gleichungssystem */

eq_1: A11*u+A12*v+A13*w=-B11$
eq_2: A21*u+A22*v+A23*w=-B21$
eq_3: A31*u+A32*v+A33*w=-B31$
solve ([eq_1, eq_2, eq_3])$
float(%);
```

(%o128) $$[[w = 75086.87, v = 319.8208, u = 3645.852]]$$

$$M_{A_y} = 73739.87, R_{A_y} = 312.6996, R_{A_x} = 3663.473$$

Mit diesen Werten kann man nun das Gleichungssystem (0.1), (0.2) und (0.3) lösen und dann gilt im globalen Koordinatensystem:

$$A \quad : \quad R_{A_x} = -3.663,47N; R_{A_z} = 312,69N; M_{A_y} = 73.739,87Nmm; \quad (0.17)$$

$$B \quad : \quad R_{B_x} = 3.663,47N; R_{B_z} = 1.687,30N; M_{B_y} = 59.912,85Nmm; \quad (0.18)$$

Zum Vergleich wird eine Berechnung im FEM-Paket NX-Nastran durchgeführt:

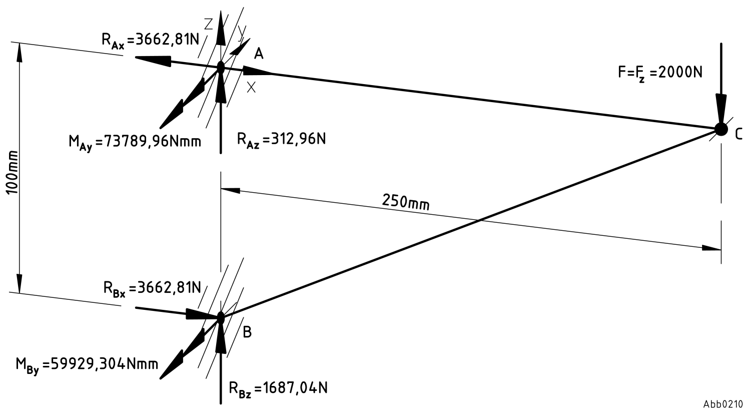

Abb. 0.2: Darstellung der Ergebnisse bei der Verwendung des FEM-Pakets NX-Nastran.

Der Vergleich zu den Ergebnissen aus NX-Nastran ergibt einen Fehler von unter $0,1\%$.